نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۳/۱۰/۲۲**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس **ریاضی۱-فنی**

(رشته‌های شیمی و مواد، معدن، نقشه برداری، ساخت و تولید)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۴۰۴- ۱۴۰۳**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید. به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی‌شود. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱- معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\ln(۷x^{۲}+۳x+۱)$ را در نقطه $x=۰$ بدست آورید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۲- با استفاده از مشتق، مقدار تقریبی $A=\sqrt[۳]{۱۰۰۳}$ را بدست آورید. **(۱۰ نمره)**

سوال ۳- نمودار تابع زیر را با بیان تمام جزئیات رسم کنید. (مجانب‌ها، اکسترمم‌ها و . . .) **(۲۰ نمره)**

$$f(x)=\frac{x^{۲}}{x^{۲}-x-۲}$$

سوال ۴- حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید : **(۳۰ نمره)**

الف) $\int \frac{\sin ۳x}{۷-\cos ۳x}dx$ ب) $\int \frac{x^{۲}+۲۷}{x^{۳}-۹x}dx$ ج) $\int_{۱}^{۲}\ln(۲x)dx$

سوال ۵- حجم جسم صلب حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی‌های $y=x^{۲}-x$ و $y=۰$ حول محور xها را بدست آورید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۶- همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x^{۳}+۵}$ را بررسی کنید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۷- طول قوس منحنی تابع $f(x)=\int_{۱}^{x}\sqrt{t^{۲}-۱}\,dt$ را در فاصله $۱\le x\le ۲$ را بدست آورید. **(۱۵ نمره)**

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : چون $f(0)=0$ پس خط مماس از نقطه $(0,0)$ می‌گذرد.

$$f'(x)=\frac{14x+3}{7x^2+3x+1} \;\to\; m=f'(0)=3 \;\to\; y-0=3(x-0) \;\to\; y=3x$$

پاسخ سوال۲ : تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در نظر می‌گیریم. داریم : $f(1000)=\sqrt[3]{1000}=10$

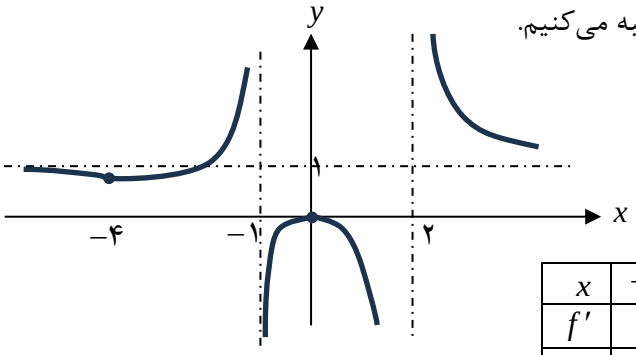
همچنین داریم : $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \;\to\; f'(1000)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1000^2}}=\dfrac{1}{300}$

بنابر این : $\sqrt[3]{1003}=f(1003)=10+\dfrac{1}{300}(1003-1000)=10+\dfrac{1}{100}=10{,}01$

پاسخ سوال۳ : ابتدا دامنه تابع را مشخص می‌کنیم. $x^2-x-2=0 \;\to\; x_1=-1\ ,\ x_2=2 \;\to\; D_f=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

چون $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ پس $y=1$ مجانب افقی منحنی و چون $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\pm\infty$ آنگاه $x=-1$ و $x=2$ دو مجانب قائم آن هستند. مشتق تابع و ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{-(x^2+4x)}{(x^2-x-2)^2} \qquad \begin{cases} f'(x)=0 \;\to\; x^2+4x=0 \\ \to\; x_3=0\ ,\ x_4=-4 \end{cases}$$



جدول تغییرات تابع را کامل می‌کنیم.

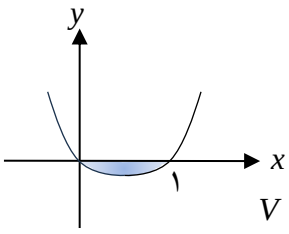
x	$-\infty$		-4		-1		0		2		∞
f'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	1	$\searrow$	$\frac{8}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ ∞	$+\infty$	$\searrow$ 1

پاسخ سوال۴ : الف) چون $(7-\cos 3x)'=3\sin 3x$ پس داریم : $\displaystyle\int\frac{\sin 3x}{7-\cos 3x}dx=\frac{1}{3}\ln(7-\cos 3x)+c$

ب) $\displaystyle\int\frac{x^2+27}{x^3-9x}dx=\int\frac{x^2+27}{x(x-3)(x+3)}dx=\int\left(\frac{-3}{x}+\frac{2}{x-3}+\frac{2}{x+3}\right)dx=-3\ln x+2\ln(x-3)+2\ln(x+3)+c$

ج) با فرض $u=\ln(2x)$ و $dv=dx$ داریم $du=\dfrac{dx}{x}$ و $v=x$ و در نتیجه به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت :

$$\int_1^2\ln(2x)dx=\left[x\ln(2x)\right]_1^2-\int_1^2 x\times\frac{1}{x}dx=2\ln 4-\left[x\right]_1^2=4\ln 2-1$$



پاسخ سوال۵ : نقاط برخورد منحنی با محور xها دو نقطه با طولهای $x_1=0$ و $x_2=1$ هستند.

$$V=\pi\int_0^1(x^2-x)^2dx=\pi\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)dx=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{30}$$

پاسخ سوال۶ : اگر $x\geq 1$ آنگاه داریم $\dfrac{1}{x^3+5}<\dfrac{1}{x^3}$ و بنابر این : $\displaystyle 0<\int_1^\infty\frac{dx}{x^3+5}<\int_1^\infty\frac{dx}{x^3}=\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^\infty=0-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$

پس انتگرال ناسره همگراست.

پاسخ سوال۷ – داریم $f'(x)=\sqrt{4x^2-1}$ و در نتیجه $\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+(4x^2-1)}=2x$ پس طول قوس خواسته شده برابر است با : $\displaystyle \ell=\int_1^2\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_1^2 2xdx=x^2\Big|_1^2=3$